数理解析研究所講究録
311巻 1977年 48-57

λよりも大きいブロック共有数をもつquasi-residual BIB design (v, b, r, k, λ)が存在するための必要条件

広島大 計算センター 小林 康幸
広島大 理学部 浜田 昇

§1. 序

BIB design $D(v, b, r, k, \lambda)$において,

$$v = k(k+\lambda-1)/\lambda,\ b = v+k+\lambda-1,\ r = k+\lambda \qquad (1.1)$$

が成り立つ時, このdesign Dをquasi-residual designという. また, quasi-residual design Dを含む対称なBIB design $(b+1, r, \lambda)$が存在する時, そのdesign DはSBIB designに"埋め込み可能(embeddable)"であるという.

一般に, 会合数がλより大きいブロックが存在するquasi-residual design (v, b, r, k, λ)は, SBIB designに埋め込めないことは良く知られている.

ここでは, 会合数がλより大きいブロックをもつquasi-residual design (v, b, r, k, λ)が存在するための必要条件を, ブロックの大きさkの範囲で与える.

§2. いままでの結果

定理 2.1. (Connor [2]) 任意のＢＩＢ design $D(v, b, r, k, \lambda)$が与えられた時，その異なる２つのブロック B_j, B_u $(j \neq u)$ の会合数を s_{ju} とすると，

$$-(r-\lambda-k) \leqq s_{ju} \leqq \{2\lambda k + r(r-\lambda-k)\}/r$$

定理 2.2. (Hamada and Kobayashi [3]) 任意のＢＩＢ design $D(v, b, r, k, \lambda)$に対して，その incidence 行列を N とすると，$N^T N (\equiv \| s_{\alpha\beta} \|)$ は次の３条件を満たす $b \times b$ 対称行列でなければならない。

(a) $s_{\alpha\beta}$ は，$0 \leqq s_{\alpha\beta} \leqq k$，$s_{\alpha\alpha} = k$ なる整数，

(b) $\displaystyle\sum_{j=1}^{b} s_{\alpha j} = \sum_{j=1}^{b} s_{j\beta} = rk$,

(c) $\displaystyle\sum_{j=1}^{b} s_{\alpha j} s_{\beta j} = (r-\lambda) s_{\alpha\beta} + \lambda k^2$

(ただし，α, β は $1 \leqq \alpha, \beta \leqq b$ なる整数である)

§3. quasi-residual design のブロック構造

この節では，quasi-residual design $D(v, b, r, k, \lambda)$が会合数 s のブロックをもつ為には，k がどのような範囲であるか

を議論する．以下，s および λ は，$s \geqq \lambda+1$，$\lambda \geqq 3$ を仮定する．

<u>補題 3.1</u>　会合数が s のブロックをもつ *quasi-residual design* が存在するためには，k は，任意の整数 j に対して，次の不等式を満たさねばならない．

$$f_j(k;\lambda, s) \equiv j(j+1)k^2 - ck + d \geqq 0 \qquad (3.1)$$

ただし，

$$c = (4j-2)\lambda^2 + 2(s-j^2-j)\lambda + j(j+1),$$

$$d = 4\lambda^4 - (4j+14)\lambda^3 + \{8s+12j+6+j(j+1)\}\lambda^2 - \{2s^2+4sj+2s+3j(j+1)\}\lambda$$

<u>証明</u>　会合数が s のブロックをもつ *quasi-residual design* が存在したとし，その *incidence* 行列を N，$(s_{ij}) \equiv N^T N$ を $b \times b$ 対称行列とすると，一般性を失なわずに $s_{12} = s$ としてよい．$x_\ell = s_{1,\ell+2}$，$y_\ell = s_{2,\ell+2}$ $(\ell = 1, 2, \cdots, n-2)$ とすると，定理2.2より

$$\sum_{i=1}^{b-2} x_i = \sum_{i=2}^{b-2} y_i = k(k+\lambda-1) - s,$$

$$\sum_{i=1}^{b-2} x_i y_i = \lambda k^2 - ks, \qquad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{b-2} x_i^2 = \sum_{i=1}^{b-2} y_i^2 = \lambda k^2 - s^2$$

一方，x_i，y_i，λ は整数だから，任意の整数 j に対し，

$$\sum_{i=1}^{b-2} (x_i + y_i - 2\lambda + j + 1/2)^2 \geqq (b-2)/4 \qquad (3.3)$$

(1.1), (3.2)を使って整理すると結果を得る.　　　Q.E.D.

<u>補題 3.2</u>　会合数が s のブロックをもつ quasi-residual design が存在する為には, $s \leqq 2\lambda-1$, $\alpha \leqq k \leqq \beta$ でなければならない. ただし,

$$\alpha = \lambda s/(2\lambda - s),\quad \beta = \{2\lambda^3 - 7\lambda^2 + (4s+3)\lambda - s^2 - s\}/(s-\lambda) \tag{3.4}$$

<u>証明</u>　(3.1)で $j=0$ とすると,

$$f_0(k;\lambda,s) = 2\lambda\{(\lambda-s)k + 2\lambda^3 - 7\lambda^2 + (4s+3)\lambda - (s^2+s)\}$$

従って $s \geqq \lambda+1$ だから $k \leqq \beta$ を得る. 次に定理 2.1 を quasi-residual design に適用すると, $s \leqq 2\lambda k/(k+\lambda)$. $2\lambda k/(k+\lambda) < 2\lambda$ を使って $s \leqq 2\lambda - 1$. 従って上の不等式を k について整理すると, $\alpha \leqq k$ を得る.　　　Q.E.D.

<u>補題 3.3</u>　$f_j(k;\lambda,s)$ および α, β をそれぞれ, (3.1) および (3.4) で定義したものとすると, $j \leqq -1$, $\alpha \leqq k \leqq \beta$ では常に $f_j(k;\lambda,s) \geqq 0$ である.

<u>証明</u>　(i) $j=-1$ の時

$\lambda+1 \leqq s \leqq 2\lambda-1$, $k \geqq \alpha = \lambda s/(2\lambda - s)$ より,

$$\begin{aligned} & f_{-1}(k;\lambda,s) \\ &= 2\lambda\{(3\lambda-s)k + 2\lambda^2(\lambda-1) + 2s + 3\lambda(s-\lambda-1) + s(2\lambda-1-s) - \lambda s\} \\ &\geqq 2\lambda\{(3\lambda-s)k - \lambda s\} \geqq 0 \end{aligned}$$

(ii) $j \leqq -2$ の時

$$f_j(k;\lambda,s) = a^* j^2 + b^* j + c^* \equiv g(j)$$

とおくと,

$$a^* = k^2 + (2\lambda - 1)k + \lambda(\lambda - 3) \quad (>0),$$

$$b^* = a^* - 4\lambda(\lambda k + \lambda^2 - 3\lambda + s), \qquad (3.5)$$

$$c^* = 2\lambda\{-(s-\lambda)k + 2\lambda^3 - 7\lambda^2 + (4s+3)\lambda - (s^2+s)\}$$

従って,

$$-b^*/2a^* = -1/2 + 2\lambda(\lambda k + \lambda^2 - 3\lambda + s)/a^* > -1/2,$$

$$g(-2) = 2\{a^* + \lambda(5\lambda - s)k + 2\lambda^3(\lambda - 2) + \lambda^2(\lambda + 2s - 9) + (2\lambda - s)s\lambda + 3s\lambda\} > 0$$

ゆえに, $j \leqq -2$ では $g(j) > 0$ Q.E.D.

さて, ここで k についての2次方程式

$$f_j(k;\lambda, s) = j(j+1)k^2 - ck + d = 0$$

の2根を α_j, β_j $(\alpha_j \leqq \beta_j)$, $m(j;\lambda,s)$ をその平均, すなわち

$$\alpha_j = \frac{c - \sqrt{D_j(\lambda,s)}}{2j(j+1)}, \quad \beta_j = \frac{c + \sqrt{D_j(\lambda,s)}}{2j(j+1)} \qquad (3.6)$$

$$m(j;\lambda,s) = c/\{2j(j+1)\}$$

と定義する. (ただし $D_j(\lambda,s) = c^2 - 4dj(j+1)$).

<u>補題 3.4</u> (i) $k = \alpha$ $(= \lambda s/(2\lambda - s))$ の時, 任意の j, λ, s に対し $f_j(\alpha;\lambda,s) \geqq 0$, かつ等号成立は $j = 2\lambda - s - 1$ または $2\lambda - s$ に限る.

(ii) 任意の λ, s に対し, $m(j;\lambda,s)$ は $j\ (\geqq 1)$ の単調減少関数であり,

(a) $m(j;\lambda,s) < \alpha \quad (j \geqq 2\lambda - s)$,

(b) $m(j;\lambda,s) > \alpha \quad (j \leqq 2\lambda - s - 1)$

証明 (i) (3.2), (1.1) から

$$\lambda\sum_{i=1}^{b-2}(x_i + y_i - s) = \{(2\lambda - s)k - \lambda s\}(k + s - 1),$$

$$\lambda\sum_{i=1}^{b-2}(x_i + y_i - s)^2 = \{(2\lambda - s)k - \lambda s\}\{(2\lambda - s)k - s(\lambda - 1)\}$$

$$\therefore \quad f_j(k;\lambda,s) = \lambda\left\{\sum_{i=1}^{b-2}(x_i + y_i - 2\lambda + j + \tfrac{1}{2})^2 - (b-2)/4\right\}$$

$$= \lambda\sum_{i=1}^{b-2}(x_i + y_i - s)^2 + 2\lambda(s - 2\lambda + j + \tfrac{1}{2})\sum_{i=1}^{b-2}(x_i + y_i - s)$$

$$+ \lambda(b-2)\{(s - 2\lambda + j + 1/2)^2 - 1/4\}$$

e, f を, $e = s - 2\lambda + 2j + 1$, $f = (\lambda - 1)(s - 4\lambda + 2j + 1)$ とすると,

$$f_j(k;\lambda,s) = \{(2\lambda - s)k - \lambda s\}(ek + f)$$
$$+ \lambda(b-2)\{(s - 2\lambda + j + 1/2)^2 - 1/4\} \qquad (3.7)$$

$$\therefore \ f_j(\alpha;\lambda,s) = \lambda(b-2)\{(s - 2\lambda + j + 1/2)^2 - 1/4\} \geqq 0$$

さらに, 等号成立は $j = 2\lambda - s - 1$ または $2\lambda - s$ の時のみ.

(ii) $\partial m(j;\lambda,s)/\partial j = -\lambda\{2\lambda j^2 + (s - \lambda)(2j+1)\}/\{j^2(j+1)^2\} < 0$,

$$2\{m(2\lambda - s - 1;\lambda,s) - \alpha\}(2\lambda - s - 1)(2\lambda - s)$$
$$= s(s - \lambda - 1) + \lambda(2\lambda - 1 - s) + 2s - \lambda > 0,$$

$$2\{m(2\lambda - s;\lambda,s) - \alpha\}(2\lambda - s - 1)(2\lambda - s)$$

$$= -(\Delta-1)(2\lambda-\Delta) - 2\lambda^2 < 0$$

より結果を得る. Q.E.D.

補題 3.5 (i) $j \geqq 2\lambda-\Delta$ の時, $D_j(\lambda,\Delta) \geqq 0$ なら $\beta_j < \alpha$,

(ii) $1 \leqq j \leqq 2\lambda-\Delta-1$ の時, $D_j(\lambda,\Delta) \geqq 0$ なら $\alpha \leqq \alpha_j \leqq \beta_j \leqq \beta$,

(iii) $j = 2\lambda-\Delta-1$ の時, $D_j(\lambda,\Delta) \geqq 0$, $\Delta \neq 2\lambda-1$ なら $\alpha_j = \alpha$, $\beta_j = (\lambda-1)(\Delta+1)/(2\lambda-\Delta-1)$.

証明 (i) 補題 3.4 より明らか.

(ii) $\lambda+1 \leqq \Delta \leqq 2\lambda-1$, $1 \leqq j \leqq 2\lambda-\Delta-1$ だから

$$\beta = (3\lambda-\Delta-1) + 2\lambda(\lambda-1)^2/(\Delta-\lambda) \geqq 2\lambda^2-\lambda \quad (\Delta = 2\lambda-1),$$

$$m(j;\lambda,\Delta) \leqq m(1;\lambda,\Delta) = (\lambda^2+\Delta\lambda-2\lambda+1)/2 < 2\lambda^2-\lambda$$

ゆえに $\beta_j \leqq \beta$ を示すには, $f_j(2\lambda^2-\lambda;\lambda,\Delta) \geqq 0$ を示せばよい. $k = 2\lambda^2-\lambda$, $1 \leqq j \leqq 2\lambda-\Delta-1$ の時, (3.5) より,

$$a^* j^2 + b^* j \geqq a^* + b^* = 4\lambda(2\lambda-\Delta-1) \geqq 0$$

$$c^* = 2\lambda(2\lambda-\Delta-1)(\Delta+2\lambda^2-3\lambda) > 0$$

ゆえに

$$f_j(2\lambda^2-\lambda;\lambda,\Delta) = a^* j^2 + b^* j + c^* > 0$$

(iii) (3.7) より, $j = 2\lambda-\Delta-1$ の時

$$f_j(k;\lambda,\Delta) = \{(2\lambda-\Delta)k-\lambda\Delta\}\{(2\lambda-\Delta-1)k-(\lambda-1)(\Delta+1)\}$$

ゆえに結果を得る. Q.E.D.

ここで, $K(\lambda,\Delta)$ を次のように定義する.

$$K(\lambda,\Delta) = K(\lambda) \cap \{[\alpha,\beta] - \bigcup_{j\in A}(\alpha_j,\beta_j)\} \qquad (3.8)$$

ただし，$K(\lambda)$は，$k(k-1)/\lambda$（または(1.1)のv）が整数になる$k(\geqq 2)$の集合，α，βおよびα_j，β_jはそれぞれ(3.4)および(3.6)で定義した数，Aは

$$A \equiv A(\lambda, s) = \{j : 1 \leqq j \leqq 2\lambda - s - 1,\ D_j(\lambda, s) \geqq 0\}$$

これまで示した補題から，次の定理が導かれる．

<u>定理 3.1</u>　$\lambda \geqq 3$，$s \geqq \lambda+1$の時，会合数がsのブロックをもつ quasi-residual design $D(v, b, r, k, \lambda)$が存在する為には，$s \leqq 2\lambda-1$，$k \in K(\lambda, s)$でなければならない。

<u>系 3.1</u>　$k \neq \lambda(2\lambda-1)$なら，会合数が$2\lambda-1$のブロックをもつ quasi-residual design $D(v, b, r, k, \lambda)$は存在しない。

<u>証明</u>　(3.8)で$s = 2\lambda-1$とすると$K(\lambda, 2\lambda-1) = \{\lambda(2\lambda-1)\}$となり，結果を得る．　　Q.E.D.

<u>系 3.2</u>　$\lambda \geqq 7$の時，会合数が$2\lambda-2$のブロックをもつ quasi-residual design $D(v, b, r, k, \lambda)$が存在するためには，$k = \lambda(\lambda-1)$または，$2\lambda^2 - 3\lambda + 1 \leqq k \leqq 2\lambda^2 + \lambda + 1$でなければならない。

<u>証明</u>　$A(\lambda, 2\lambda-2) = \{1\}$，また補題3.5の(iii)から，$\alpha_1 = \lambda(\lambda-1)$，$\beta_1 = (\lambda-1)(2\lambda-1)$．従って

$$K(\lambda, 2\lambda-2) = K(\lambda) \cap \{k ;\ k = \lambda(\lambda-1) \text{ または } (\lambda-1)(2\lambda-1) \leqq k \leqq \beta\}$$

一方，

$$\beta=(2\lambda^3-3\lambda^2+\lambda-2)/(\lambda-2)=2\lambda^2+\lambda+3+4/(\lambda-2)$$

従って，$\lambda \geqq 7$ なら $[\beta]=2\lambda^2+\lambda+3$．さらに，

$$2\lambda^2+\lambda+3,\ 2\lambda^2+\lambda+2 \notin K(\lambda),\quad 2\lambda^2+\lambda+1 \in K(\lambda)$$

より結果を得る．　Q.E.D.

系 3.3　$3 \leqq \lambda \leqq 6$ の時，会合数が $2\lambda-2$ のブロックをもつ quasi-residual design (v, b, r, k, λ) が存在するためには，k は表 3.1 で与えられる整数でなければならぬ．

表 3.1　$(s=2\lambda-2,\ 3 \leqq \lambda \leqq 6)$

$\lambda=3$	$s=4$	$k=6$ または $10 \leqq k \leqq 28$
4	6	$k=12$ または $21 \leqq k \leqq 41$
5	8	$k=20$ または $36 \leqq k \leqq 56$
6	10	$k=30$ または $55 \leqq k \leqq 82$

証明　$\lambda=3, 4, 5, 6$ の時，それぞれ，$[\beta]=28, 41, 59, 82$ さらに，$59, 58, 57 \notin K(5)$ より結果を得る．　Q.E.D.

系 3.4　(i)　$\lambda=3$ の時，$K(3,5)=\{15\}$，

$K(3,4)=\{6, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 28\}$

(ii)　$\lambda=4$ の時，$K(4,7)=\{28\}$，

$K(4,6)=\{12, 21, 24, 25, 28, 29, 32, 33, 36, 37, 40, 41\}$

$K(4,5)=\{9, 12, 13, 16, 17, 20, 21, 24, 25, \cdots\ 76, 77\}$

系 3.4 の (i) の結果は Lawless [4] が求めた結果と同じであ

る．また次の系 3.5 は [1] で得られた結果と同じである．

系 3.5　$k > 2(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1)$ の時，λ より大きい会合数をもつ quasi-residual design $D(v, b, r, k, \lambda)$ は存在しない．

証明　$\beta = \{2\lambda^3 - 7\lambda^2 + (4s+3)\lambda - s^2 - s\}/(s-\lambda)$ は，s の単調減少関数である．$\lambda+1 \leqq s \leqq 2\lambda-1$ だから

$$\beta \leqq 2(\lambda-1)(\lambda^2-\lambda+1) \qquad \text{Q.E.D.}$$

参考文献

[1] R. C. Bose, S. S. Shrikhande and N. M. Singhi, Edge regular multigraphs and partial geometric designs with an application to the embedding of quasi-residual designs, Teorie Combinatorie Tomo I (1973), 49-81.

[2] W. S. Connor, On the structure of balanced incomplete block designs, Ann. Math. Statist. 23 (1952), 57-71.

[3] N. Hamada and Y. Kobayashi, On the block structure of BIB designs with parameters v = 22, b = 33, r = 12, k = 8 and λ = 4, To appear in J. Combinatorial Theory (1977).

[4] J. F. Lawless, Block intersections in quasi-residual designs, Aequationes Math. 5 (1970), 40-46.